

U POTRAZI ZA FIBONAČIJEM

U POTRAZI ZA FIBONAČIJEM

*Priča o matematičkom geniju
koji je promenio svet*

KIT DEVLIN

Prevod:
Aleksandra Ravas



Naslov originala
Keith Devlin:
FINDING FIBONACCI
*The Quest to Rediscover the Forgotten Mathematical
Genius Who Changed the World*

Copyright © 2017 Keith Devlin
Copyright © 2018. za srpsko izdanje, Heliks

Izdavač
Heliks

Za izdavača
Brankica Stojanović

Urednik
Bojan Stojanović

Lektura
Vesna Đukić

Redaktura
Aleksandra Dragosavljević

Štampa
Newpress, Smederevo

Prvo izdanje

Knjiga je složena
tipografskim pismima
Gentium Plus i Ashley Script

ISBN: 978-86-6024-002-8

Smederevo, 2018.

www.heliks.rs

Sadržaj

PRELUDIJUM

Sputnjik i diferencijalni i integralni račun 1

POGLAVLJE 1

Poplavljena ravnica 5

POGLAVLJE 2

Rukopis 18

POGLAVLJE 3

Prvi koraci 34

POGLAVLJE 4

Statua 41

POGLAVLJE 5

Šetnja duž pizanske obale 54

POGLAVLJE 6

Vrlo dosadna knjiga? 61

POGLAVLJE 7

Franči 69

POGLAVLJE 8

Objavljivanje Fibonačija: od samostana do sajta Amazon.com 81

POGLAVLJE 9

Prevod 92

POGLAVLJE 10

Čitajući Fibonačija 110

POGLAVLJE 11

Lov na rukopis, prvi deo (promasaji) 131

POGLAVLJE 12

Lov na rukopis, drugi deo (napokon uspešan) 143

POGLAVLJE 13

Karika koja nedostaje 159

POGLAVLJE 14

Ovo će promeniti svet 173

POGLAVLJE 15

Leonardo i rađanje savremenih finansija 184

POGLAVLJE 16

Odrzi u srednjovekovnom ogledalu 205

DODATAK

Vodič kroz poglavlja Liber abbaci 220

BIBLIOGRAFIJA 228

INDEKS 231

U POTRAZI ZA FIBONAČIJEM

PRELUDIJUM

Sputnjik i diferencijalni i integralni račun

Ukoliko vam moje ime zvuči poznato, sva je prilika da ste pročitali neku od mojih knjiga o matematici (napisao sam ih oko 35, a mnoge su namenjene opštoj publici), ili ste možda pročitali neki članak koji sam objavio u časopisu ili novinama, ili ste pročitali jedan od mojih tekstova s nekog bloga (pišem četiri bloga), ili ste pohađali neku sesiju mog masovnog otvorenog onlajn kursa (engl. *MOOC – massively open online course*) na temu matematike, ili ste me čuli na Nacionalnom javnom radiju, gde sam poznat kao Matiša. Da, ja sam taj Kit Devlin. I da, volim matematiku.

Prema mišljenju većine, takođe sam i dobar matematičar. Međutim, nije uvek bilo tako. U prvih nekoliko razreda osnovne škole matematika mi je išla veoma loše. Štaviše, poslednji sam u razredu savladao tablicu množenja, a tom neminovnom ritualu inicijacije pridavana je velika važnost u matematičkom obrazovanju u Engleskoj tokom pedesetih godina XX veka. Savladavanje tablice množenja (danas je predavači matematike nazivaju „multiplikativnim vezama brojeva“, po svojoj prilici da bi joj dali savremeni prizvuk) kod mene je izazvalo toliko

teskobe da su moji roditelji morali otići učitelju i objasniti da moje slabo znanje nije rezultat nedovoljnog truda. Jednostavno, nisam kapirao. Nisam bio, kako su rekli, talentovan za matematiku.

Stvari su se popravile do moje devete godine, i zahvaljujući veoma brzom napredovanju u svim predmetima, uključujući i matematiku, preskočio sam četvrti razred i upisao se odmah u peti, poslednji razred osnovne škole, a sa 10 godina polagao sam državni selekcionni ispit za upis u srednju školu, „11 plus“. Jedini sam u školi „položio“ taj ispit, što je značilo da sam obezbedio sebi mesto u akademski orijentisanoj srednjoj školi (gimnaziji), umesto da pohađam opštiju Srednju savremenu školu, zamišljenu da stvori sledeću generaciju britanskih fabričkih radnika, školu u koju su se upisali svi (i doslovno svi) moji drugovi iz razreda.

Kada stvari posmatram sa ove distance, izgleda da sam na početku imao teškoća s matematikom zato što sam se zaglavio pokušavajući da *razumem* množenje, dok su svi ostali jednostavno naučili tablicu kao besmisleni stih iz *Karazubijade*.¹ Ali u to vreme nijedna osoba iz mog okruženja nije smatrala da se matematika može razumeti, ona je pre bila besmisleno učenje napamet, prepona koju ste morali da savladate kako biste napredovali kroz sistem, a koja je opravdana mantrom „trebaće ti kasnije u životu“. (U mom slučaju, ispostavilo se da sam zaista imao koristi od sve te matematike koju sam učio u školi, zajedno s tablicom množenja, ali samo zato što sam postao matematičar. Već kada sam pošao na studije, pojavili su se elektronski kalkulatori i učinili zastarelom tu praktičnu prednost vladanja tablicom množenja.)

U gimnaziju sam pošao 1958. (napunivši tada 11 godina), iste godine kada je Rusija poslala prvi satelit (Sputnjik) u vasionu. Čovečanstvo se nalazilo na pragu kosmičkog doba, i ja sam želeo

¹ Pesa Luisa Kerola, tvorca *Alise u zemlji čuda*, neobičnog naslova *Jabberwocky*, koju je, pod naslovom *Karazubijada*, na srpski jezik preveo Ivan V. Lalić (1931–1996). Pored tog, postoji i prevod Dragoslava Andrića (1923–2005), *Džabervok*, te Antuna Šoljana (1932–1993) pod naslovom *Hudodrakija*. (Prim. prev.)

da učestvujem u tome, posebno nakon što je američki predsednik Džon F. Kenedi izjavio na TV-u da će oni (Amerikanci, koji su još uvek uživali u svom uspehu posle spasavanja Evrope od nacista u II svetskom ratu i koji su darovali svetu zavodljivu filmsku zabavu) poslati čoveka na Mesec.

Tako sam pošao u srednju školu sa ciljem da postanem „kosmički naučnik“. Nisam bio potpuno siguran šta to znači, ali mi je bilo jasno da se podrazumeva znanje fizike. A pošto vam je za fiziku bila potrebna matematika, shvatio sam da je i matematika predmet u kome moram briljirati. Ali dok mi je fizika imala smisla, matematika baš i nije. Nisam je previše voleo, jer sam je smatrao nepovezanim zbirkom recepata i trikova za rešavanje numeričkih problema. Trudio sam se, uglavnom zbog toga što je činila deo puta ka tome da postanem „kosmički naučnik“.

Naravno, sviđalo mi se ono zadovoljstvo koje doživite kada rešite matematički zadatak, ali, za razliku od fizike, nisam posmatrao matematiku kao jednu disciplinu. Za mene je matematika bila samo koristan alat za bavljenje fizikom. Međutim, sve se promenilo kada sam sa šesnaest godina počeo da učim diferencijalni i integralni račun.

Diferencijalni i integralni račun je neverovatno moćan. To je matematički alat koji vam omogućava da formulišete i rešite jednačine neophodne da biste poslali čoveka na Mesec. A u isto vreme je duboko zagonetan.

Kao što sam kasnije u životu shvatio, zagonetnost je bila posledica načina na koji su ga predavali. Nastavnik matematike nam je dao spisak simboličkih pravila za izračunavanje izvoda i integrala. Savladajte ta pravila, i moći ćete da rešite sve jednačine potrebne za let u svemir. Ali ta simbolička pravila bila su potpuno, hm, čudna. Zašto bi koeficijent pravca krive x^n bio nx^{n-1} ? A bilo je previše jednostavno poverovati da je koeficijent pravca funkcije $\sin x$ baš $\cos x$. Čak ni holivudski filmovi nisu toliko glupi. Pa opet, prema mom udžbeniku, tako je glasilo pravilo.

Ipak, pošto sam bio stariji i mudriji nego u vreme kada sam bio petogodišnjak, sa šesnaest godina nisam dozvolio da me nerazumevanje zaustavi, kako se to desilo sa množenjem. Jednostavno sam vežbao primenu svih pravila dok nisam mogao da rešim sve zadatke iz svog udžbenika diferencijalnog i integralnog računa. (Tokom procesa, zaista sam ih sve rešio.)

Međutim, nisam se zadovoljio time da samo koristim pravila. Stvarno sam želeo da ih razumem. Dok sam nastojao da ih shvatim, počeo sam da posmatram matematiku ne kao skup nepovezanih tehnika, procedura i trikova, već kao koherentnu celinu, prostran, saznajni krajolik, koji su, kroz tri milenijuma, izgradili neki od najpametnijih ljudi koje je svet video. Bio je to istovremeno moćan i prelep krajolik.

Kada sam završio srednju školu, nisam više želeo da postanem kosmički naučnik. Postao sam matematičar, makar duhom, ako ne znanjem. U poređenju s matematičkim svemirom čije sam neke delove imao prilike da vidim nakratko – uglavnom tako što sam progutao nekoliko u to vreme dostupnih knjiga u kojima je o matematici pisano razumljivo, što je žanr kome pripadaju knjige koje sam pisao tokom većeg dela svog života – pravi svemir bio je dosadan.

Upravo zato sam odlučio da ne studiram fiziku, već matematiku. Posle šest godina stekao sam diplomu osnovnih studija, odbranio doktorat iz matematike (usput sam napokon dostigao i nivo razumevanja diferencijalnog i integralnog računa, što je bio cilj zbog kog sam krenuo tim putem) i započeo karijeru profesionalnog matematičara. Bilo je to 1971. Imao sam 24 godine.

POGLAVLJE 1

Poplavljena ravnica

Toskana, septembra 2002. Poput većine današnjih posetilaca Pize, krenuo sam vozom iz Firenze – bila je to mala kompozicija od četiri vagona koju je vukla bučna dizel lokomotiva, potpuno drugačija od Intersiti ekspresa elegantnih linija koji me je brzo odvezao južno od Trenta. Čak i na kraju sezone voz je bio pun turista, a većinu su činili mladi s rančevima na leđima. Svi su govorili veoma glasno kako bi nadjačali buku motora. U vagonu sam čuo Amerikance, Britance, Australijance, Nemce, Francuze, Skandinavce i Japance. Kao lučki grad iz vremena Rimljana i veliki mediteranski srednjovekovni trgovački centar, Piza je očigledno još uvek međunarodno odredište, iako se čini da su danas glavni tovar strani turisti.

Čim je voz napustio Firencu i počeo da vijuga kroz predivna talasasta brda vinske regije Kjanti, putovanje je postalo očaravajuće. S obe strane šina uzdizale su se strme padine pokrivene nepravilnom šahovskom tablom svetlozelenih vinograda, od kojih je svaki bio trasiran s geometrijskom preciznošću. Povremeno, poneko polje se spuštalo skroz do šina, pa su putnici mogli da ga bolje pogledaju. U ovo kasno leto, čokoti su otežali od sazrelog crnog grožđa koje će uskoro biti obrano i od njega će nastati vina po kojima je ova regija čuvena.

Na kraju, brda su ustupila mesto širokoj ravnici koja se prostirala do Pize i dalje sve do morske obale. Neposredno pre mog dolaska u Italiju padale su jake kiše, i čim je voz prošao vinograde, ponovo je počelo da pada. Dok je lokomotiva usporavala stižući na odredište, primetio sam da je zemlja s obe strane šina još uvek bila pod vodom dubine bar tridesetak centimetara. U ovim krajevima poplave su redovne i trajni su podsetnik zašto je Piza bila lučki grad: u doba Rimljana, a i pre njih, na ovom mestu nalazila se pizanska luka.

Do trenutka kada je voz stigao u Pizu kiša je prerasla u neprekidan, jak pljusak. Mali, neobični, jeftin hotel koji sam rezervisao preko interneta bio je savršeno pozicioniran za razgledanje, nalazio se u samom centru starog srednjovekovnog grada, u blizini reke. Nažalost, železnička stanica baš i nije bila u centru – Centralna stanica je to samo po nazivu. Kao što sam to doživeo mnogo puta u Njujorku, i u Pizi se svi voze taksijem kad pada kiša. Zbog toga ispred železničke stanice nije bilo nijednog taksija. Čekao sam u redu čitav sat dok nisam napokon uspeo da nađem prevoz, pri čemu mi je jedina zaštita da ne iskisnem bio kišobran. Ubrzo sam počeo da žalim što nisam poneo samo ranac, pa da mogu da otpešačim do svog odredišta kao što su mnogi moji saputnici i učinili. Bio je to u doslovnom i figurativnom značenju pokisao završetak mog putovanja. Pa ipak, napokon sam bio u Pizi, spremajući se da načinim prvi korak u potrazi koja će, ispostavilo se, trajati čitavih sedam godina; hteo sam da sklopim deliće priče o jednoj od najuticajnijih ličnosti u ljudskoj istoriji, o srednjovekovnom matematičaru koji mi je tokom godina u neku ruku postao opsesija.

Moj dolazak iskrasao je potpuno slučajno. Bio sam pozvan u Italiju da održim predavanje na jednoj međunarodnoj konferenciji u Rimu, na temu jednog polja matematičkog shvatanja koje je bilo u povelju. Zamoljen sam da održim predavanja na još nekoliko univerziteta – u Torinu, industrijskom centru na severozapadu zemlje, u turističkom odredištu Trentu, koje se nalazi u planinskoj vinogradskoj regiji na severoistoku, u drevnom gradu Bolonji, na pola puta

između Trenta i Firenze, i u predivnoj Sijeni u kojoj sam pre više od dve decenije proveo nekoliko sedmica kao gostujući profesor.

Odlučio sam da u pauzi između planiranih predavanja u Bolonji i Sijeni na dva dana skrenem sa rute i odem u Pizu kako bih pokušao da saznam nešto o Leonardu Fibonačiju, misterioznom matematičaru iz XIII veka koji je očigledno odigrao ključnu ulogu u stvaranju savremenog sveta, i čije sam matematičke korake, u jednom važnom smislu, pratio poslednjih dvadeset godina.

Da li je na raspolaganju bilo dovoljno informacija da se o njemu napiše knjiga? Niko drugi je nije napisao, pa sam posumnjao u to. S druge strane, postojanje tog ogromnog jaza u istoriji nauke značilo je da je Fibonači bio najpoznatiji i najkompletniji naučnik svih vremena čija biografija nikada nije bila napisana. Želeo sam da pokušam.

Nisam se interesovao kao istoričar, jer to nisam. Matematičar sam. Ono što me je najviše zaintrigiralo u vezi s Leonardom jeste



SLIKA 1. Ovaj drvorez koji prikazuje Leonarda jedna je od samo dve njegove slike koje postoje. Nema dokaza da je ovaj prikaz išta više od mašte autora.

ta značajna sličnost moje i njegove matematičke karijere. Osetio sam da smo srodne duše.

Dok sam se zaklanjao pod kišobranom čekajući taksi, kratko sam razmišljao o tome kako je moja matematička karijera bila drugačija od budućnosti koju sam zamišljao daleke 1968, kada sam završio postdiplomske studije na Londonskom univerzitetu i kada sam se zaputio na Bristolski univerzitet kako bih pripremio doktorat.

U to vreme, na samom početku svoje karijere, o Fibonačiju sam jedino znao da je on matematičar koji je otkrio čuveni, po njemu nazvan, Fibonačijev niz (nije to uradio – nisam bio u pravu), za koji sam znao da je duboko povezan sa ljudskom estetikom (nije – nisam bio u pravu). Tek mnogo kasnije otkrio sam da je on bio jedan od najuticajnijih ljudi svih vremena. I još, da njegova veličina nije posledica njegovih matematičkih otkrića – iako je bez sumnje bio najsposobniji matematičar među svojim savremenikima – već njegove moći objašnjavanja. Bio je sposoban da shvati matematičke ideje koje su u njegovo vreme bile nove i komplikovane i učini ih dostupnim širokom sloju ljudi. Štaviše, posedovao je instinkt da to uradi na način koji bismo današnjim rečnikom opisali kao „dobru marketinšku strategiju“.

Dok sam bio mlad diplomac, moji uzori nisu bili ljudi poput Leonarda Fibonačija, već matematičari koji su došli do značajnih matematičkih otkrića – matematički divovi koji su živeli bliže današnjici, kao što su Leonard Ojler, Karl Fridrih Gaus, Pjer de Ferma i Kurt Gedel. Poput mnogih mladih koji izaberu da postanu matematičari, sanjao sam da se pridružim nizu najvećih – tako što bih dokazao važnu teoremu ili rešio težak zadatak koji je decenijama mučio najveće umove.

Neki od mojih savremenika uspeli su u tome. Mladi američki matematičar Pol Koen, samo nekoliko godina stariji od mene, rešio je 1963. Kantorov problem kontinuumu, zagonetku koja je više od 60 godina uporno odolevala svima koji su pokušavali da je reše. Ali kao što je to slučaj s većinom matematičara, morao sam da se zadovoljim značajno manjim uspesima.

Tokom svoje karijere, kao i većina od 25.000 profesionalnih matematičara sa svih strana sveta koji su navedeni u *Međunarodnom adresaru matematičara*, rešio sam izvestan broj manjih problema i dokazao nekoliko solidnih, ali uglavnom nevažnih teorema. Predavao sam na univerzitetima u Škotskoj, Norveškoj, Nemačkoj, Kanadi i Sjedinjenim Državama (gde sam se i trajno preselio 1987), i napisao sam popriličan broj udžbenika za matematičare i studente. Opet, sve su to prilično tipični potezi u karijeri većine matematičara, iako sam se ja možda selio više od većine, pa i napisao više knjiga od većine.

Ali usput sam, skoro igrom slučaja, otkrio još jedan talenat, možda moj istinski poziv: sposobnost da običnim ljudima objasnim često nejasne, složene matematičke ideje. Shvatio sam da pomoću reči mogu da oživim matematiku onima koji nisu baš upućeni u taj predmet.

Zahvaljujući jednom neplaniranom nizu događaja otkrio sam tu sposobnost, i time sam započeo drugu karijeru kao javni tumač matematike. Početkom osamdesetih godina XX veka, po povratku u Ujedinjeno Kraljevstvo nakon četiri godine provedene u Norveškoj i Nemačkoj, bio sam sve nezadovoljniji činjenicom da su časopisi i novine često objavljivali članke o biologiji, fizici, hemiji itd. ali jako retko, gotovo nikad o matematičarima. U nekoliko navrata kada jesu pisali o matematičarima, bilo je to toliko loše, da su često osnovnu ideju tumačili potpuno pogrešno. U martu 1983. odlučio sam da uradim nešto u vezi s tim, te sam napisao kratak članak i poslao ga redakciji *Gardijana*, britanskih nacionalnih novina.

U pitanju je bila prvoaprilaska šala, koju je trebalo objaviti 1. aprila. Opisao sam jednu matematičku činjenicu koja je, iako istinita, bila toliko neintuitivna da bi većina čitalaca, primetivši datum, pomislila da je u pitanju šala – i na taj način bi postali žrtve prave šale: članak je bio istinit.

Nekoliko dana kasnije, urednik naučne rubrike Entoni Taker¹ pozvao me je telefonom i obavestio me je da nisu mogli objaviti

¹ Taker je preminuo 1998.

članak. „Ali“, rekao je, „sviđa mi se vaš stil. Izgleda da posedujete istinski talenat da objasnite komplikovane ideje tako da ih obični ljudi razumeju.“

Taker me je savetovao da napišem nov članak. Taj moj drugi članak objavljen je u *Gardijanu* 12. maja 1983. Još nekoliko tekstova je stiglo do štamparije, izmamivši izvestan broj pisama zahvalnosti uredniku. A kad je kasnije iste godine *Gardijan* počeo da nedeljno objavljuje stranicu posvećenu personalnim računarima, na njoj se dva puta mesečno pojavljivala moja kolumna *Mikromatematika*. Kolumna je neprekidno izlazila do 1989, a onda sam se, nakon dvogodišnjeg gostovanja na Univerzitetu Stanford u Kaliforniji, trajno preselio u Sjedinjene Države.

Ubrzo sam otkrio da mi se nova uloga tumača sviđala. Uvek sam strastveno bio zainteresovan za sve aspekte matematike i nikad mi se nije dopadala činjenica da tako mnogo ljudi ima potpuno pogrešnu sliku o ovom predivnom predmetu. Većina ljudi smatra da se matematika tiče samo brojeva, ali to uopšte nije tačno. Da, brojevi imaju važnu ulogu, ali matematika nije samo brojanje. Matematika se bavi pravilnostima i strukturama. Matematika otkriva skrivenu lepotu koja se nalazi odmah ispod površine svakodnevnog sveta. Uživao sam u izazovu da stalno tražim načine da objasnim nov razvoj u višoj matematici onim čitaocima moje kolumne koji su spadali u laike. Česta pisma čitalaca u kojima su iskazivali poštovanje a povremeno i zbunjenost, hranila su moju posvećenost.

Ohrabren uspehom koji je postigla moja kolumna, počeo sam da pišem knjige i članke namenjene svima, uključujući tu i neke za poslovne ljude. Pored toga, držao sam predavanja za laike i počeo sam povremeno da gostujem na radiju i na televiziji. U periodu od 1991. do 1997. uređivao sam *FOCUS*, mesečni časopis Društva matematičara Amerike (MAA), a od januara 1996. pisao sam mesečnu kolumnu „Devlinov ugao“ za *MAA Online*, internet magazin Društva matematičara Amerike. (Kolumna je sada u formatu bloga.)

Početkom 1995. jedna povoljna okolnost dovela je do toga da postanem redovan saradnik slušanog nacionalnog radija u Sjedinjenim

Državama, uz medijski identitet kao Matiša. Jednog dana dobio sam poziv iz jutarnje emisije *Weekend Edition* (*Vikend izdanje*), zabavno-informativnog kolaža koji se emitovao subotom na Nacionalnom javnom radiju. Voditelj Skot Sajmon je hteo da razgovara sa mnom o rešenju problema starog 350 godina – poznatog kao Poslednja Fermaova teorema – koji je postao udarna vest nakon što ga je Endru Vajls, matematičar s Prinstona, rešio nekoliko meseci ranije.

Iako se Skot i ja nećemo sresti licem u lice još mnogo meseci – veći deo naših razgovora snimamo tako što se ja nalazim u jednom kalifornijskom studiju, a Skot u studiju NJR u Vašingtonu, što nam je bio običaj tada, a i sada je – odmah smo se uklopili uživo u programu. Slušaocima se svidelo naše prisno, šaljivo šegačenje – koje je od samog početka bilo potpuno spontano. Mnogi su pisali uredniku emisije da bi to rekli. I ponovo sam, a da to nisam planirao, otkrio da imam još jednu novu ulogu: ovog puta sam se, kao „radijska ličnost“, pojavljivao u emisiji svakih nekoliko nedelja. Konačno sam dobio i umetničko ime. Portir u studiju ubrzo je počeo da me dočekuje rečima: „Stigao je Matiša“. Jednog dana sam to spomenuo producentu emisije *Weekend Edition*, a on mi je odgovorio: „O, pa pod tim imenom te ubacujemo u naš raspored“. I tako je rođen Matiša na NJR-u.

Svaki novi korak ispunjavao me je još većim zadovoljstvom, jer mi je sve više i više ljudi prilazilo nakon predavanja, ili slalo pisma, ili pisalo mejlove nakon čitanja nekog mog članka ili nakon slušanja mog nastupa na radiju. Rekli bi mi da su za njih moje reči bile inspirativne, nudile su izazov, pozivale na razmišljanje ili su jednostavno u njima uživali. Roditelji, nastavnici, nezaposlene mame, poslovni ljudi i penzioneri zahvaljivali bi mi na tome što sam im probudio interesovanje za predmet koji su jako davno prestali da uče zato što im je bio nedorečen i dosadan ili previše težak da bi ga razumeli, i što sam izazvao novo poštovanje prema njemu. Trebalo mi je vremena da shvatim da sam uticao na živote ljudi, otvarajući im oči za čudesan svet matematike.

Ništa od svega toga nisam planirao. Slučajno sam postao tumač matematike. Tek nakon što sam shvatio da sam rođen s talentom koji su ljudi cenili – a koji je, po svoj prilici, prilično redak – počeo sam da razvijam i usavršavam svoj „dar“.

U tom procesu tumačenja tuđih matematičkih ideja tako da ih razumeju laici, samo sam sledio druge koji su takođe činili napor da organizuju i saopšte matematičke ideje ljudima izvan te discipline. U toj veoma maloj podgrupi onih koji su prenosili matematičko znanje drugima, dvojica koje smatram najvećim i najuticajnijim tumačima matematike svih vremena jesu Euklid i Leonardo Fibonači. Obojica su napisala grandiozne knjige koje su uticale na razvoj matematike, a samim tim i na razvoj ljudskog društva.²

Euklidovo klasično delo *Elementi* predstavilo je starogrčku geometriju i teoriju brojeva tako dobro organizovano i razumljivo da ga čak i danas neki predavači koriste kao udžbenik. Nije poznato da li je bilo koji od rezultata ili dokaza koje Euklid navodi u knjizi zaista njegov, iako je opravdano pretpostaviti da neki jesu, možda čak i mnogi od njih. Međutim, ono što čini *Elemente* tako velikim i uticajnim delom jeste način na koji je Euklid organizovao i predstavio materiju. Toliko je dobro obavio posao da njegov tekst i danas čini osnovu nastave geometrije u školi. Sadašnji srednjoškolski udžbenici geometrije i dalje prilično precizno slede *Elemente*, a prevodi originala se i dalje objavljuju.

Pošto je do pre neku godinu obavezan deo školskih programa matematike u SAD i Velikoj Britaniji bilo izučavanje geometrije na način na koji je ona izložena u *Elementima*, većina ljudi je imala prilike da se sretne sa Euklidovim učenjem tokom školovanja, i mnogima njegovo ime i naslov njegove čuvene knjige zvuče poznato. S druge strane, Leonardo iz Pize i njegova knjiga *Liber abbaci* mnogo su manje

² Po mom mišljenju, blizak tome da postane treći je Abu Abdulah Muhamed ibn Musa el Horezmi ('Abú 'Abdalláh Muḥammad ibn Mūsā al-Khwārizmī), čije su arapske knjige iz IX veka o indoarapskoj aritmetici i algebri takođe bile pisane za široku publiku, iako u to vreme za njega nisam znao. Ali zbog stagnacije u kulturi koja je preplavila države arapskog govornog područja u srednjem veku i koja i dan-danas postoji, ostalo je na Leonardu da sve to znanje učini dostupnim.

poznati, a ipak je njihov uticaj na savremeni život mnogo veći. *Liber abbaci* je bila prva sveobuhvatna knjiga o praktičnoj aritmetici koja se pojavila u Zapadnom svetu. Iako vrlo malo nas ikada koristi geometriju, ljudi širom sveta svakog dana koriste aritmetičke metode koje je Leonardo opisao u delu *Liber abbaci*.

Za razliku od originalnih Euklidovih *Elemenata* koji su široko rasprostranjeni i lako dostupni, jedina verzija Leonardovog rukopisa *Liber abbaci* koju danas možemo da čitamo jeste drugo izdanje koje je završio 1228, a ne originalni tekst iz 1202. Štaviše, postoji samo jedan prevod s latinskog na engleski jezik koji je objavljen relativno skoro, 2002. godine.

Liber abbaci je impresivno delo. Iako njena velika slava počiva na delu teksta posvećenom indoarapskoj aritmetici, u pitanju je temeljna knjiga o matematici koja ne obuhvata samo aritmetiku, već i početak algebre i nešto primenjene matematike, a sve čvrsto zasnovano na teorijskim osnovama Euklidove matematike.

Opisaću sopstvenu reakciju pošto sam prvi put pročitao *Liber abbaci* u poprilično dugačkom desetom poglavlju ovog teksta, a za čitaoce koji žele da saznaju više, dajem kratak pregled njenog sadržaja u Dodatku. Dozvolite mi da za sada pripremim pozornicu za svoju priču tako što ću vam dočarati sveukupnu aromu Leonardove knjige.

Leonardo je postavio čitav niz opštih metoda za rešavanje aritmetičkih problema (za neke od njih koristio je geometrijsku algebru koja se može naći u drugoj knjizi *Elemenata*), dajući striktne dokaze da bi opravdao metode, kao što su to radili stari Grci.

Konkretno govoreći, objasnio je – i dao opravdanje – za neke nealgebarske metode rešavanja problema koje su bile dobro poznate u srednjem veku, poput postupka za proveru „odbacivanje devetki“³,

³ *Casting out nines* (engl.). Provera rezultata računanja koja se zasniva na osobini da proizvoljan broj (B) i zbir njegovih cifara (Z) daju isti ostatak pri deljenju brojem devet ($B \equiv Z \pmod{9}$). U doba kada ljudi nisu imali mašine za računanje na raspolaganju, ovaj način provere je bio zgodan, samo ne uvek i tačan, pošto ne može da identifikuje ako se u rezultatu greškom zamene mesta ciframa, ili se greškom za rezultat dobije broj čiji je zbir cifara uvećan za 9 (*Prim. prev.*)

raznih „osobina proporcija“ i metoda poznatih pod nazivima „metod pogrešne pretpostavke“⁴ i „metod dvostruke pogrešne pretpostavke“.⁵ Nijedan se danas ne predaje đacima koji stalno uz sebe imaju kalkulator. Odista, ti metodi izašli su iz mode do trenutka kada sam ja počeo da učim aritmetiku u pedesetim godinama XX veka, deceniju pre nego što se pojavio digitalni stoni kalkulator! (Dok sam se bavio istraživanjem o Leonardu, potražio sam objašnjenja tih metoda, ali već sam zaboravio kako funkcionišu.)

Stvarni uticaj knjiga je imala zahvaljujući svojim primerima. Leonardo je u nju uvrstio čitavo bogatstvo primera primene matematike na poslovanje i trgovanje. Tu se nalaze zadaci o konverziji novca, težina i količina, o metodima razmene, poslovnim ortaklucima i podeli zarade, o legiranju kovanica, ulaganju novca i prostom i složenom kamatnom računu.

Najverovatnije, da bi dobio na raznovrsnosti i zadržao pažnju čitalaca, začinio je svoju priču i izvesnim brojem veoma veštačkih, simpatično formulisanih zabavnih zadataka, smišljenih da ilustruju različite aspekte matematike koju je opisivao. Za neke od tih zabavnih⁶ zadataka naveo je genijalna rešenja koja su možda bila njegovo lično otkriće. Ispostaviće se da će jedan od tih zabavnih zadataka zauvek biti povezan sa Fibonačijem.

Uzgred, izgleda da je neobično zapisivanje reči *abbaci* u kome se nalaze dva slova *b* uveo baš Leonardo da bi napravio razliku od naziva za različite vrsta sprava koje su trgovci koristili za svoje računice. Jer,

⁴ *Regula falsi* (lat.), *single false position* (engl.). Podrazumeva da je pretpostavljeno rešenje, onda ubacivanje te vrednosti u zadatak kako bi se proverilo da li ono zaista zadovoljava postavljene uslove, a zatim prilagođavanje pretpostavljenog rešenja (smanjivanjem ili uvećavanjem) sve do postizanja cilja. (Prim. prev.)

⁵ *Regula duorum falsorum* (lat.), *double false position* (engl.). Slično prethodnom, samo što se pretpostavlja da postoje dva rešenja (npr. *a* i *b*), od kojih je jedno manje od tačnog (npr. razlika označena sa E_a) a drugo veće (npr. razlika označena sa E_b), pa se traženo rešenje dobija pomoću jednakosti $x = \frac{bE_a - aE_b}{E_a - E_b}$. (Prim. prev.)

⁶ Dodavanje zabavnih zadataka je književna alatka koju, kao i svi ostali matematičari koji pišu za široku publiku, i sam često koristim.

u *Liber abbaci* se objašnjavao postupak računanja bez upotrebe tih sprava. (Sasvim sigurno nije u pitanju „knjiga o abakusu“ u savremenom tumačenju reči „abakus“ – s jednim slovom b.)

Nakon što je završio prvo izdanje *Liber abbaci*, Leonardo je napisao još nekoliko matematičkih knjiga, a njegova dela su uticala na to da postane slavna ličnost širom cele Italije – jednom prilikom dobio je poziv da bude gost cara Fridriha II, pa ipak veoma malo je napisano o njegovom životu.

Odlučio sam 2001. da krenem u potragu i sakupim to malo poznatih činjenica o njemu i da njegovu priču ispričam široj publici. Moji motivi? U Leonardu sam video nekoga ko je, poput mene, posvetio mnogo vremena i truda pokušajima da učini matematiku svog vremena dostupnom svima. (To je danas poznato kao promocija matematike, i tek poneki matematičar se time bavi.) On je div čije sam tragove sledio.

Uopšte nisam bio siguran da ću uspeti. Tokom godina izgradio sam dobru reputaciju kao tumač matematike, ali napisati knjigu o Leonardu bio bi nov podvig. Morao bih da postanem izučavalac arhivske građe, i da pokušam da nađem smisao u latinskim rukopisima iz XIII veka. Definitivno sam izlazio van granica meni poznatog terena.

Nepostojanje pouzdanih informacija o Leonardu u istorijskim spisima značilo je da je nemoguće napisati tradicionalnu biografiju – verovatno zbog toga nijedan srednjovekovni istoričar nije to uradio. Da bih ispričao svoju priču, morao sam u velikoj meri da se oslonim na *matematičku* nit koja povezuje naš današnji svet sa Leonardovim – a taj jedinstveni pristup, karakterističan za matematiku, omogućila je bezvremena priroda discipline. Čak i tako, bio bi to težak zadatak.

Konačno, sreća mi se osmehnula. Široko mi se osmehnula. I to ne samo jednom, već nekoliko puta. Triput sam imao sreće, i to baš prave sreće, na samom početku svog projekta.

Prva srećna okolnost, najvažnija od svih, ukazala mi se upravo u trenutku kada sam krenuo u potragu. Godine 2001, profesorka

Rafaela Franči, italijanska istoričarka srednjovekovne matematike s Univerziteta u Sijeni, započinjala je pionirsko izučavanje rukopisa iz kasnog XIII veka koji je posedovala jedna arhivska biblioteka u Firenci. Analiza Frančijeve je ukazala (a drugi naučnici su kasnije potvrdili) da je rukopis dao tako dugo traženu „kariku koja nedostaje“ da bi se dokazalo da su Leonardo, i posebno *Liber abbaci*, bili glavni okidači aritmetičke i finansijske revolucije koja je započeta u Toskani, nedugo nakon objavljivanja knjige, i koja se u dogledno vreme proširila severnom Evropom – detalji o svemu tome slede.

Zahvaljujući toj srećnoj okolnosti, kada je 2011. objavljen moj istorijski prikaz *The Man of Numbers: Fibonacci's Arithmetic Revolution* (*Čovek od brojeva: Fibonačijeva aritmetička revolucija*), mogao sam da nadomestim neizbežan nedostatak informacija o njegovom životu time što sam prvi na svetu prikazao otkriće Frančijeve koje je pokazalo da je moj srednjovekovni uzor kada je u pitanju tumačenje matematike zaista odigrao ključnu ulogu u stvaranju savremenog sveta.

Drugi put sreća mi se osmehnula 2002, kada je objavljen prevod na engleski kompletne *Liber abbaci*, što je prvi i do sada jedini prevod tog klasičnog dela na neki savremeni jezik. To je značilo da nisam morao da se podsećam latinskog koji sam učio u školi kako bih razumeo Leonardovo delo, te sam umesto toga mogao da se usredsredim na matematički sadržaj. Frančijeva mi je, kada smo se prvi put sreli početkom 2002, rekla da će ta knjiga uskoro biti objavljena pa sam odmah naručio primerak u pretplati na Amazonu.

Treći put sam imao sreće 2004. Vilijam Gecman, profesor finansija sa Univerziteta Jejl, takođe je nabavio i proučio prevod dela *Liber abbaci* na engleski jezik, pa je objavio poduži članak pod naslovom *Fibonači i finansijska revolucija*⁷, u kome je analizirao Leonardov tekst da bi pokazao kako se u njemu u suštini mogu naći prethodnici svih

⁷ *Fibonacci and the Financial Revolution*, objavljeno u: Goetzmann i Rouwenhorst, 2005, str. 123–143.

savremenih finansijskih instrumenata. (U kombinaciji sa otkrićem Rafaele Franči tako se dobija divan dokaz da je za korene savremenog sveta finansija zaista zaslužan Leonardo.)

Toskanska prolećna kiša dobovala je prednjim dvorištem železničke stanice žešće nego ikad pre, pa ipak, red putnika koji su ispred mene čekali taksi smanjivao se, jer bi se jedan po jedan auto pojavljivao i brzo bi ih odvezao njihovim kućama ili hotelskim sobama. Uskoro ću i ja doći na red, a zatim ću, sutradan, zaista započeti svoju istragu, s namerom da otkrijem što više o Leonardu.

Sve je počelo u Pizi. Baš tu je, tačno 800 godina ranije, 1202. Leonardo dovršio *Liber abbaci* – knjigu koja će, u bukvalnom smislu reči, promeniti svet. Sebi sam postavio zadatak da ispričam njegovu priču.

POGLAVLJE 2

Rukopis

Piza, 1202. Mladić u kasnim dvadesetim spustio je pero, posmatrajući kako se mastilo polako suši na listu hartije koji je ležao na stolu ispred njega. Gomila rukom ispisanih listova, a bilo ih je preko 400, naslagana na jednoj strani stola bila je visoka 7–8 centimetara.

Svoj projekat počeo je pre nekoliko godina, u vreme kada je napustio dom u kome je odrastao i pridružio se ocu, Gilihmu ili Giljelmu (Vilijamu) Bonačiju, bogatom pizanskom trgovcu koji je nešto ranije poslat u južnomediteranski grad Bedžaju, kao trgovački predstavnik i carinik. Tamo, u muslimanskoj Severnoj Africi, mladi Leonardo Pizano (Leonardo iz Pize) sreo se s arapskim trgovcima i učenim ljudima koji su mu otkrili čudesan pronalazak, pronalazak za koji je bio siguran da može da promeni svet.¹

Učeni ljudi iz Bedžaje koji su Leonardu pokazali otkriće nisu bili za taj pronalazak zaslužni – oni su bili tek prenosiooci. Samo

¹ Ljudi koriste reč Arapi pod različitim značenjem. U ovoj knjizi, ja je koristim u uobičajeno prihvaćenom formalnom smislu koji označava ljude čiji je prvi jezik za poslovno ili kulturno delovanje bio arapski – kao što kažemo Grci kada govorimo o ljudima kojima je prvi jezik u kulturi bio grčki. Upotrebljena u navedenom smislu, reč Arapi podrazumeva ljude mnogih nacionalnosti, koji su većinom, ali ne svi, muslimani.

otkriće bilo je znatno starije i poticalo je iz Indije, od pre 700. godine n. e. Arapski trgovci preneli su ga severno, kopnom, na obale Mediterana.

Leonardo je uzeo stranu koju je upravo napisao i pažljivo je spustio na vrh gomile. Sada je knjiga imala naslov. Ponovo je pročitao tu stranu s vrha:

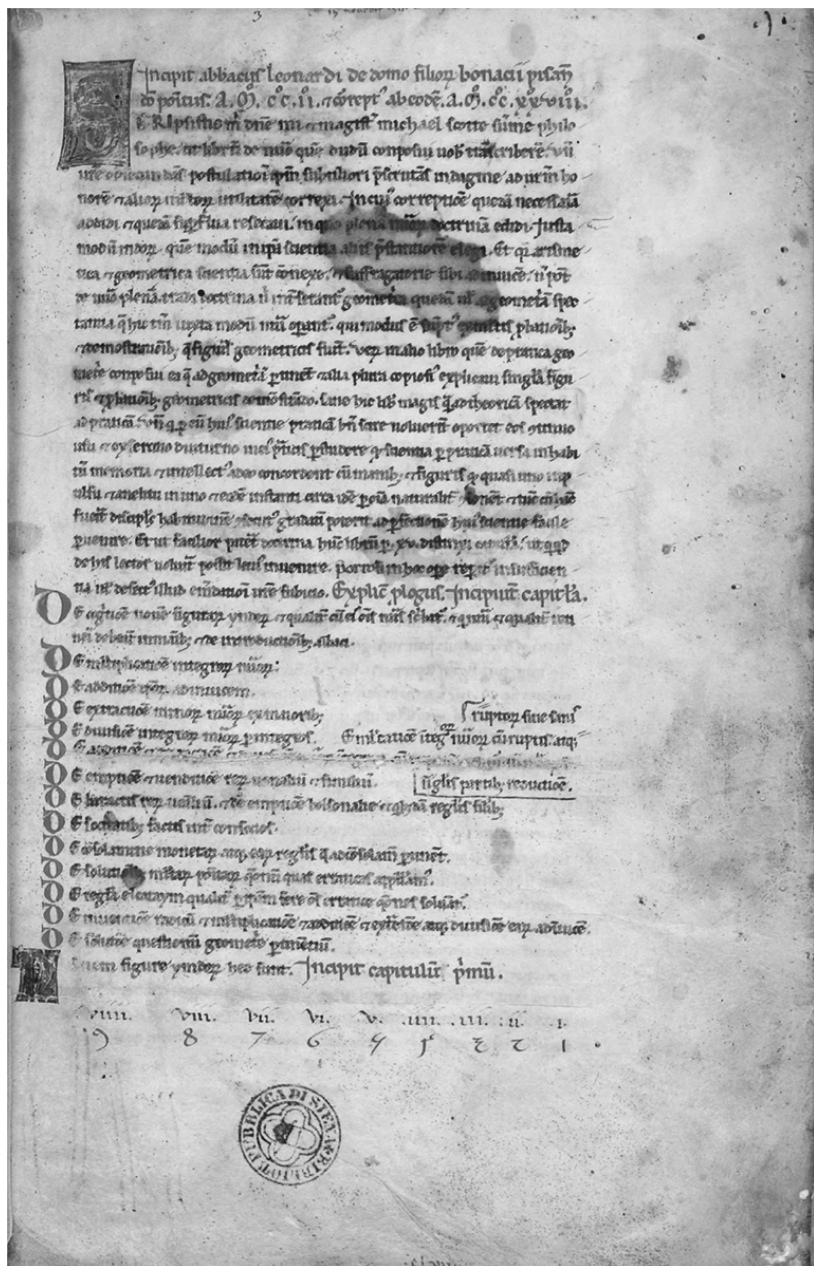
Ovde počinje Knjiga o računu
koju je napisao Leonardo Pizanski, iz porodice Bonači,
godine 1202.

(Kao što je u to vreme bio običaj svih učenih ljudi u Evropi, i Leonardo je pisao na latinskom. Naslov njegove knjige na latinskom glasio je *Liber Abbaci*.)

Otkriće o kom je Leonardo pisao bio je izvanredan nov način zapisa brojeva i računanja s njima. Transformacija ljudskog života koja je posledica tog novog sistema biće toliko silna i potpuna da će mnogo kasnije generacije prihvatiti taj pronalazak zdravo za gotovo, degradirajući brojeve i aritmetiku u zamornu ali neophodnu rutinsku gnjavažu koja se morala učiti ponavljanjem (ili su je čak još novije generacije prepustile mašinama). To je sistem zapisivanja brojeva i vršenja osnovnih aritmetičkih operacija o kome se danas predaje u školama širom sveta. Leonardova knjiga je učinila taj sistem dostupnim poslovnim ljudima Zapadne Evrope. *Liber abbaci* će odigrati glavnu ulogu u stvaranju savremenog sveta.

Sigurno je delimično slučajno *Liber abbaci* imao veliki uticaj, a slučajan je i bio niz događaja koji je naveo Leonarda da je napiše.

Biti rođen u Pizi u XII veku značilo je biti rođen u središtu Zapadnog sveta. A odrasti u pizanskoj trgovačkoj porodici značilo je pripadati najvažnijem delu društva. Kada je Leonardo rođen, Italija je bila centar neizmerno važne međunarodne trgovine između država koje su nicale duž obala Mediteranskog mora, i još uvek se ubrzano razvijala. Piza je, zajedno s još dva italijanska primorska grada – Đenovom na severnoj obali Italije i Venecijom na severoistočnoj



SLIKA 2. Prva strana knjige *Liber abbaci*, iz primerka koji se čuva u sijen-
skoj Narodnoj biblioteci.

obali – predvodila trgovinu, i njihovi su brodovi neprestano plovili od jedne mediteranske luke do druge. Trgovci iz te tri luke bili su ključni igrači koji su razvijali radikalno nove načine vođenja međunarodnog poslovanja, i tako oblikovali napredovanje novog sveta koji je sve više postajao kosmopolitski.

Pa ipak, vreme i mesto čine samo deo priče. Obično samo istinski genije uočava značaj u nečemu svakidašnjem i prepoznaje ogroman potencijal da se promeni svet pomoću nečega što većini ljudi deluje kao obična ili nerazumljiva ideja. Krajem XVI veka Galileo Galilej je, posmatrajući uljanu lampu na visokom plafonu katedrale u Pizi kako se njiše na povetarcu, primetio ključnu stvar koja je direktno dovela do otkrića sata s klatnom, prvog preciznog mehaničkog aparata za merenje vremena. U XVII veku Njutn je, videvši jabuku kako pada s grane, shvatio da mora postojati nevidljiva sila – gravitacija – koja ne samo da upravlja svim živim stvarima na Zemlji, već kontroliše i kretanje celog univerzuma. U XX veku, Albert Ajnštajn se zapitao kako bi izgledalo putovati uporedo sa snopom svetlosti. Postavio je, na prvi pogled dečje, pitanje koje ga je dovelo do toga da otkrije relativnost a uz nju i nuklearnu energiju i atomsku bombu.

Klatno, gravitacija, relativnost – sve su to bile pojedinačne ideje, posmatrano iz današnje perspektive, jednostavne ideje koje su promenile svet. Tako je i s brojevima. Dok je nekoliko godina živeo u Severnoj Africi, Leonardo je uočio da su arapski trgovci koristili sistem za pisanje brojeva i računanje s njima koji su preuzeli od Indusa, i bio je uveren u ogroman potencijal tog izuma, posebno za svetsku trgovinu. Kao rezultat tog oštroumnog zapažanja, nekoliko sledećih godina pisao je opširno uputstvo za korišćenje novog sistema.

Iako je Leonardo rođen u imućnoj porodici koja je imala uticajne prijatelje, iako je umro kao poznati pisac dela *Liber abbaci* i nekoliko drugih knjiga, skoro da uopšte nema istorijskih zapisa o njegovom životu. Znamo da je rođen oko 1170, ali ne znamo tačnu godinu i nismo sasvim sigurni gde je rođen. Najverovatnije je to bilo u Pizi, gde je proveo veći deo svog detinjstva. Prema tadašnjem običaju

za davanje imena, kasnije u životu, nakon što je postao slavan, bio bi poznat kao Leonardo Pizanski. Istoričar Gijom Libri mu je 1838. dao nadimak Fibonači, što je skraćenica latinske fraze *filius Bonacci* kojom je Leonardo sam sebe opisao u uvodu svoje knjige. (Iako je bukvalno značenje izraza *filius Bonacci* sin Bonačija, Leonardov otac nije se zvao Bonači, pa bi ga možda trebalo prevesti kao „pripadnik porodice Bonači“.) Poslednji put su savremenici pomenuli Leonarda 1240. godine, i to u Pizi, ali nemamo predstavu o tome koliko je dugo živio, niti gde je i kad umro.²

Kada sam se zainteresovao za Leonarda, iznenadila me je činjenica da je samo 200 godina nakon svoje smrti on uveliko bio zaboravljen. A opet, tokom života je postao slavan širom cele Italije i njegova rodna Piza mu je odala počast. Međutim, kao što sam saznao od poznatih mi naučnika koji proučavaju srednji vek, to nije bilo neobično s obzirom na tadašnje običaje. Izuzimajući pripadnike plemstva, iza vrlo malo ljudi ostao je pisani trag o njihovom životu, čak i ako su postigli velike stvari. Slava koju je Leonardo stekao tokom svog života bila je zasnovana na njegovim knjigama, između ostalog i na delu *Liber abbaci*. Bio je poznat kao nadaren matematičar i tumač matematike i, kasnije u životu, poštovan javni službenik. Očigledno je bio ostvaren čovek. Ali niko od njegovih savremenika nije ni slutio da je njihov sunarodnik napravio jedinstven doprinos koji će na kraju promeniti svet. O tome je svoj sud dala istorija.

Mnogo me više iznenađuje – a to sam shvatio dosta kasnije, nakon što sam saznao znatno više detalja o njemu – činjenica da istorija nije dala taj sud o Leonardovoj veličini sve do šezdesetih godina XX veka, a to je potpuno sigurno ustvrdila tek na početku XXI veka, godinu dana nakon što sam se uputio na zadatak da ispričam njegovu priču.

Ljudi u XIII veku nisu pojmlili do čega će dovesti Leonardov rad, i tako se desilo da je nakon jedne ili dve generacije, doslovno svaki spomen na Leonarda iz Pize nestao iz istorijskih zapisa, i da se

² Pogledati poglavlje 12.

njegovo ime nije pojavilo ni u jednoj knjizi o istoriji nauke ili matematike čitavih 400 godina.

Onda je, krajem XVIII veka, italijanski matematičar Pjetro Kosali naišao na mesto gde se pominje Leonardo u jednom od prvih štampanih tekstova slavnog italijanskog matematičara Luke Pačolija pod nazivom *Summa de arithmetica geometria proportioni et proportionalità*, koji je objavljen 1494.

Na sreću po istoričare, Pačoli je naveo svoje izvore, među kojima se ističe Leonardo, tako što je u uvodu knjige napisao:

I pošto većim delom koristimo rad Leonarda Pizanskog, namera mi je da razjasnim kako svako tvrđenje koje je navedeno bez imena autora treba da se pripiše Leonardu.

Ta napomena navela je Kosalija da se zapita zašto je Pačoli bio poznat, dok je čovek na čiji se rad on očigledno tako mnogo oslanjao bio potpuno nepoznat. Obavio je malo istraživanje o tom misterioznom Leonardu Pizanskom i shvatio koliko je veliku ulogu Pizanac iz XIII veka odigrao u širenju savremene aritmetike. Leonardovoj istorijskoj anonimnosti koja je potrajala 400 godina došao je kraj.

Kosali je objavio svoje delo u periodu između 1797. i 1799. a francuski istoričar Gijom Libri 1838. je nadenuo Leonardu isfabrikovano prezime Fibonači. Zatim je, sedamdesetih godina XIX veka, francuski matematičar Eduar Luka dodelio naziv Fibonačijev niz fascinantnom brojevnom nizu koji bi se pojavio kada pokušavate da rešite jedan od zabavnijih zadataka koje je Leonardo uvrstio u *Liber abbaci*. Ubrzo posle toga, ime Fibonači ne samo što je postalo široko poznato, već je dostiglo status ikone pri čemu je na njegovu rasprostranjenost uticalo interesovanje baš za taj brojevni niz.

Ipak, da Pačoli nije pomenuo Leonarda na tom jednom mestu, vrlo je verovatno kako danas niko ne bi pojmiio ogromnu ulogu koju je taj Pizanac odigrao u ljudskoj istoriji. Jer ta referenca je, posebno uzevši u obzir da ju je izneo ostvareni i veoma cenjeni matematičar,

uvećala verovatnoću da je Leonardo *mogao* da bude taj koji je pokrenuo aritmetičku revoluciju.

Bez ikakve sumnje, ono što je usledilo nakon objavljivanja *Liber abbaci* jeste bila revolucija. (Moram da naglasim da ovde koristim reč „usledilo“ u značenju „desilo se ubrzo nakon“. Utvrđivanje kauzalnosti ispostavilo se kao tvrd orah: 2003. otkrićem Frančijeve došlo se do potvrde.)

Priroda i domet te revolucije izašli su na videlo tek pre nešto više od 50 godina, onda kada je otkriven – u mnogim italijanskim arhivama srednjovekovnih rukopisa – žanr kratkih, rukom pisanih udžbenika praktične aritmetike (poznate još i kao „trgovačka aritmetika“), od kojih je svaki imao stotinak obostrano ispisanih listova.

Postojanje tog žanra rukopisa nije se moglo ni naslutiti, sve dok italijanski istoričar Đino Arigi nije naleteo na njih i šezdesetih godina XX veka nije počeo da objavljuje njihove prepise.³ Zatim je, 1980. godine američki istoričar Voren van Egmond sastavio i objavio katalog u kome je navedeno više od 250 tih udžbenika, pisanih od poslednjih decenija XIII veka do kraja XVI veka.⁴

Istoričari nazivaju te rukopise *libri d'abbaco* (knjige o računu) ili *trattati d'abbaco* (traktati o računu). Vrlo je verovatno da ih je bilo na hiljade (sledi objašnjenje).

Skoro sve knjige o računu napisane su na italijanskom narodnom jeziku, obično na lokalnom dijalektu autora. Značajno se međusobno razlikuju u dužini i matematičkom kvalitetu. Najstarije sačuvane pisane su rukom, ali su sa izumom štamparske mašine u XV veku postale jedan od prvih prepoznatljivih žanrova, pri čemu su neke od knjiga o računu postale prvi bestseleri. Više od 400 takvih tekstova koji su pisani u rasponu od 300 godina, sačuvano je do danas. Ovo ubrzano umnožavanje tekstova dramatično je svedočanstvo o značaju koji su ljudi pridavali učenju nove aritmetike.

³ Arrighi, 1964, 1967, 1973, 1987.

⁴ Van Egmond, 1980.

Tipičan traktat o računanju počinjao je objašnjenjem kako zapisivati brojeve upotrebljavajući deset cifara od 0 do 9, kako funkcioniraju pozicioni brojevni sistem i kako računati sa celim brojevima i razlomcima. Zatim bi sledio izbor urađenih primera, koji su većinom bili praktični poslovni problemi. Uobičajena praksa bila je da autor navede i tablice množenja i kvadratnih korena, kako bi pojednostavio rešavanje težih zadataka. Sve u svemu, zadaci su obično imali jednostavnu postavku i relativno kratka i prosta rešenja.

Većina knjiga o računu nema ime autora. Često su imale ilustracije, a na nekima stoje beleške da su bile poklon mecenama i važnim trgovcima. Očigledno je da su bile napisane za lokalnu publiku, pošto su zadaci s novcem obično bili iskazani u valuti lokalnog mesta ili regije. Autor bi često na početku obećavao da će objasniti „veštinu računanja u obliku u kom ona postoji u gradu...”

Posebno kada su u pitanju lošije napisane knjige, ne znamo zašto su bile napisane ili za koga. Verovatno je da su u mnogim slučajevima takve knjige pisali za svoju ličnu upotrebu oni koji su učili, i da nisu bile namenjene bilo kome drugom osim nepoznatom autoru. Na kraju krajeva, u vreme kada su se knjige ručno umnožavale, najefikasniji (i dokazano jedini primenljiv) način da se nauči praktična aritmetika bio je da se pronađe lokalna knjiga o toj temi, napravi kopija za sebe (prepisivanjem, naravno) i da se ona zatim prouči. Da je mnogo knjiga o računu bilo stvoreno i upotrebljavano na taj način, jasno je na osnovu njihovog postojanja. Strane pažljivo ispisanog teksta ukrašene su naškrabanim računicama, beleškama na marginama i crtežima, ponekad ispisanim mastilom u drugoj boji.

Uzgred, zbog toga možemo samo da pretpostavimo koliko je takvih rukopisa bilo napisano. Izgledi su jasno bili protiv toga da će sveska koju je neko pisao za ličnu upotrebu da bi naučio aritmetiku preživeti period od 800 godina, pa ipak je to bila sudbina 400 knjiga. Ako je, na primer, preživela svaka deseta, to bi značilo da je bilo napisano 4000. A čini mi se da je jedna od deset vrlo

optimistična procena za stopu preživljavanja rukom pisane sveske za ličnu upotrebu u periodu od 800 godina.

Razlika između osnovnog teksta i beležaka koje su nađene u mnogim knjigama o računu, uz neke značajne greške pri prepisivanju, ukazuje na to da je autor rukopisa često znao vrlo malo o matematičkim veštinama ili saznanjima.

Druge su pak učenije, i vrlo je moguće da su ih napisali učitelji kako bi ih koristili na predavanjima o praktičnoj aritmetici. Jer, pored toga što su se odjednom pojavile knjige o računu, u decenijama koje su usledile nakon objavljivanja *Liber abbaci* širom Italije su se takođe razvijale i škole računa (*scuole d'abbaco* ili *botteghe d'abbaco*), u kojima su deca, a možda i odrasli, učili praktičnu aritmetiku. Naravno, zajedno sa školama, nužno se rodila čitava nova profesija učitelja računa (*maestri d'abbaco*).

Zatim je, tokom decenija nakon objavljivanja *Liber abbaci*, iskrsla velika tražnja za knjigama i kursevima praktične aritmetike, najpre u oblasti Pize, a onda se proširila duž cele Italije i dalje, na Mediteran i Severnu Evropu.

Uzevši u obzir vreme u kom su se pojavili, i geografsko poreklo tih novih obrazovnih rukopisa, teško je ne izvući zaključak da je *Liber abbaci* bio uzrok, onaj pucanj koji je započeo revoluciju.

U pogledu matematike koju su obuhvatali, metodi iz knjiga o računanju većim delom su mogli da se nađu u *Liber abbaci*, iako su neke od tih knjiga imale i poglavlje o geometriji, koju je Leonardo obradio u posebnoj knjizi, *De Practica Geometrie*. Ali dok su *Liber abbaci* i *De Practica Geometrie* bile dugački, naučni tekstovi pisani na latinskom, knjige o računanju bile su, kao što sam već pomenuo, kraće i pisane narodnim, italijanskim jezikom, a koristile su znatno jednostavnije primere od onih koje je Leonardo dao u svoja dva remek-dela.

Moglo bi se pomisliti da su neki matematički umešniji autori knjiga o računanju uzeli *Liber abbaci* (i možda *De Practica Geometrie*) kao polaznu tačku, pa zatim napisali sopstvene pojednostavljene verzije. Ali u tom zaključku postoji problem – ili, preciznije, doskora je postojao.

Kao prvo, postoji značajno preklapanje kod svih knjiga o računanju – što se tiče aritmetičkog sadržaja, strukture knjiga i njihove organizacije, matematičkog stila i navedenih primera. Iz svega toga sledi da su sve nastale tako što je jedan autor prepisivao od nekog drugog, uz nešto površnih izmena. S druge strane, u pogledu izlaganja, nijedna od njih bukvalno nije imala ništa zajedničko s knjigom *Liber abbaci* (niti sa *De Practica Geometrie*).

Pa opet, čini se da sve one imaju zajednički koren. Evo kako to znamo. Pošto su autori knjiga o računu u svojim rešenim primerima koristili lokalne valute s tadašnjim vrednostima (a u nekim slučajevima i lokalne mere), savremeni naučnici mogli su da prate kako su se knjige o računu širile, i geografski i tokom vremena. To im je omogućilo da porede jedan tekst o računanju s drugim, i da na osnovu toga sklope hronološko stablo knjiga i time ukažu na to kako se žanr razvijao kroz lokalno prepisivanje i kroz savremeničko prepisivanje. Kad pogledate tu hronologiju, ne možete izbeći zaključak da je ceo žanr započet jednom praknjigom, majkom svih knjiga o računanju.

Ali pošto nijedna od knjiga o računanju nije imala ništa zajedničko s knjigom *Liber abbaci* (niti s *De Practica Geometrie*), to bi moralo da važi i za pomenutu praknjigu. Pa ko ju je onda napisao? Ko god da je bio, uradio je to pre 1290. ili otprilike tad, pošto je ta godina pripisana prvoj knjizi o računanju koja je nađena, a očigledna matematička nesposobnost njenog autora sasvim jasno nalaže da *ta knjiga* ne može biti praknjiga. (To je knjiga koju je Frančijeva istraživala u Firenci u periodu od 2001. do 2003.)

Da bi napisao praknjigu, autor je morao biti sposoban ne samo da pročita Leonardova dva obimna, naučna toma pisana na latinskom, *Liber abbaci* i *De Practica Geometrie*, već i da razume njihov sadržaj dovoljno dobro da bi mogao da napiše znatno pojednostavljen prikaz tog materijala. Štaviše, pošto hronološko stablo vodi ka Pizi, vrlo je verovatno da je autor živeo u blizini tog grada.

Uzevši u obzir istorijske zapise, postoji samo jedan mogući kandidat: Leonardo glavom i bradom. Da je postojao drugi matematičar

toliko uspešan koliko je bio Leonardo, sigurno bi iza njega ostala njegova sopstvena zbirka rukopisa.

Povrh toga, pouzdano znamo da je Leonardo *zaista* napisao znatno jednostavniju, kraću knjigu o aritmetici. U nekoliko navrata, pomenuo je da je napisao *liber minoris guise* (pojednostavljenu varijantu knjige) za *Liber abbaci*. Jedan takav komentar nalazi se u samom rukopisu *Liber abbaci*,⁵ jedan je u njegovoj knjizi *Liber quadratorum*, a postoji i treći komentar u još jednoj knjizi koju je napisao, a to je *Flos*.

Još nešto: pisac kasnije knjige o računu spominje Leonardovu *libro di minor guisa o Libro di merchanti* (pojednostavljenu varijantu knjige ili knjigu za trgovce). Ta fraza „knjiga za trgovce“ značajna je zato što ukazuje na činjenicu da je *Libro di minor guisa* najverovatnije bila sastavljena od materijala iz prvih deset poglavlja *Liber abbaci* i nekih delova *De Practica Geometrie*.

Dokaza koji su ukazivali na Leonarda kao na autora praktične knjige bilo je dosta. Jedini problem je bilo to što nikada nije nađen primerak Leonardove pojednostavljene knjige. Iako su naučnici bili sigurni da je *zaista* Leonardo bio začetnik aritmetičke revolucije (i samim tim trgovinske revolucije – sledi objašnjenje), nisu posigurno znali kako je ona izgledala. Ili, drugim rečima, tako su stajale stvari pre nego što je Frančijeva završila proučavanje jedne posebne knjige o računu iz firentinske arhive.

Zahvaljujući godini kada je rukopis o računu bio napisan – negde oko 1290. – i rezultatima više dodatnih forenzičkih ispitivanja koja su sprovedli drugi naučnici nakon što je Frančijeva objavila svoje zaključke, sada sa sigurnošću možemo potvrditi da je rukopis koji je Frančijeva istraživala *zaista* jedan od prvih primeraka Leonardove pojednostavljene knjige o praktičnoj aritmetici, možda direktno prepisan Leonardov original. (Apsolutno je jasno da je u pitanju „delo resavske škole“, pošto greške autora – verovatno nastale pri prepisivanju – i njegovi komentari ukazuju da je tu knjigu napisao

⁵ Strana 154 Bonkompanjijevog (Boncompagni) izdanja *Liber abbaci*.

neko ko nije mogao da doprinese mnogo više do da je doslovno prepíše.)

Moguće je da je Leonardo svoj pojednostavljeni tekst napisao na latinskom, a da ga je neko drugi preveo na narodni italijanski, ali kladim se da ga je Leonardo upravo napisao na italijanskom. Uostalom, knjigu je napisao kako bi novu aritmetiku učinio što pristupačnijom.

Jedno očigledno pitanje se nameće nakon otkrića knjiga o računu: šta je izazvalo potražnju svih tih knjiga i pojavu kurseva praktične aritmetike? Ispostavlja se da je na to pitanje lako dati odgovor. Ključni faktor bila je sve veća važnost aritmetike u svetu u XIII veku koji se brzo menjao, posebno u italijanskim regijama Toskani, Lombardiji i do izvesne mere u Umbriji.

U veku nakon pojave *Liber abbaci* rođen je savremeni svet finansija i globalne trgovine na malo i veliko i uvedeni su i razvijeni bankarstvo, osiguranje i dvojno knjigovodstvo, paralelno uz rast sve većih trgovinskih konglomerata. Sve te aktivnosti zavise od efikasnosti načina izvođenja aritmetičkih računica koje može da nauči svako.

Pre nego što je usvojen indoarapski sistem aritmetike, trgovci su koristili jedan od dva metoda da bi obavili svoje računicе: računanje na prste ili računanje pomoću mehaničkog abakusa. Prvi metod predstavljao je veoma mudar sistem u kome su se koristili svi prsti na obe ruke – engleska reč *digit* je nastala od latinske reči *digitus*, što znači prst na ruci ili na nozi. (Tako je računanje na prste dovelo do toga da se za osnovne brojevne simbole 0, 1, 2, do 9 danas u engleskom jeziku koristi reč *digit*.⁶)

Drevna aritmetika računanja na prste mogla je da prikaže brojeve samo do 10.000. Kao što možete da pretpostavite, bilo je potrebno značajno školovanje kako bi se savladao sistem, i dosta vežbe da bi se dostigla lakoća. Srednjovekovni udžbenici, uključujući tu i nekoliko sačuvanih prvih primeraka *Liber abbaci*, često su na prvoj strani

⁶ digit, engl. – prst, ali i cifra (*Prim. prev.*)

imali pažljivo iscrtane dijagrame s prikazom položaja prstiju kojim su se predstavljali brojevi i izvodile različite operacije.

U muslimanskom svetu i u većem delu Evrope abakus je bio ravna tabla sa iscrtanim linijama na koje su se postavljali kamenčići i zatim pomerali po njima. Taj oblik prvobitnog računanja iznedrio je reč *calculus*, koja označava sistem procedura za računanje (i samim tim doveo je do reči *calculate*⁷), pošto je *calculus* latinska reč za kamenčić. Poznatiji oblik abakusa koji se danas može naći u prodavnicama igračaka, a ima perlice nanizane na žice umesto kamenčića na tabli sa iscrtanim linijama, upotrebljavao se u Kini, gde je nazvan *xuanpan*.⁸ Baš kao i za računanje na prste, i za računanje na abakusu moralo se ozbiljno vežbati da bi se postigla tačnost i brzina.

Trgovci su postali vrlo vešti s metodom računanja koji su koristili, ma koji god izabrali, pa su oba sistema bila efikasna – makar u direktnoj trgovini. Ova poslednja napomena je bitna jer u takvoj razmeni ni iza jednog metoda ne ostaje trag računanja. U slučaju da je bilo koja strana posumnjala da je napravljena greška, jedino rešenje bilo je da se računica ponovi i da se tako nastavi sve dok oba trgovca ne bi bila zadovoljna. Ali to nije bio veliki problem. Druga, manje očigledna mana, bila je znatno važnija. Kada su poslovni ljudi u Italiji XII veka počeli da stvaraju trgovačke imperije, pojavila se očita potreba za mogućnošću revizije knjiga poslovanja. Osoba koja je iz Pize nadzirala mrežu trgovaca, morala je biti u stanju da redovno pregleda poslovne knjige.

Indoarapsku aritmetiku koja se izvodila na papiru ne samo da je bilo jednostavnije naučiti i savladati od aritmetike računanja na prste, već je imala i jasan trag, koji je bilo ko mogao da pregleda i proveriti tačnost računice. Zbog toga je skoro sigurno da su dva faktora doprinela naglom usvajanju indoarapske aritmetike u Italiji XIII veka: relativno lako učenje i upotreba, i automatsko obezbeđivanje kompletnog zapisa bilo koje računice.

⁷ calculate, engl. – izračunavati, proračunavati (*Prim. prev.*)

⁸ Često se koristi oblik suanpan. (*Prim. prev.*)

Taj drugi činilac zasigurno objašnjava zašto trgovinska revolucija nije usledila u IX veku, nakon što je persijski matematičar Abu Abdulah Muhamed ibn Musa el Horezmi objavio prethodnu knjigu o indoarapskoj aritmetici, a koju je Leonardo gotovo sigurno koristio dok je pisao *Liber abbaci*. (Upravo je El Horezmijevo ime poslužilo kao osnova za današnju reč algoritam koja označava proceduru za izvođenje računice.)

Štaviše, El Horezmi je napisao i drugu knjigu u kojoj je objasnio kako računati na opštiji, prilagodljiv način, pri čemu je jedna reč iz naslova te knjige poslužila kao osnova za savremen naziv za taj opštiji metod, algebru, a to je arapska reč *al-Jabr*.

Iako danas nematematičari imaju običaj da smatraju algebru „aritmikom sa slovima“, takav stav je pogrešan. Kao prvo, algebra se može raditi i bez upotrebe simboličkih jednačina. U prvom udžbeniku algebre koji je napisan, El Horezmi je sve iskazao u stihovima. Pristup u kome se koriste simbolički izrazi uveo je francuski matematičar Fransoa Vijet tek znatno kasnije, u XVI veku, i ispravno bi bilo nazvati ga simboličkom algebrom. Kao što im je i bila prvobitna namena, metodi algebre pristupaju numeričkim problemima na drugačiji način od metoda aritmetike. U aritmetici, *računate* s brojevima kako biste dobili rešenje zadatka. U algebri, pretpostavljate postojanje rešenja, dajete mu ime (danas ga obično označavamo slovom x), i zatim logički razmišljate kako biste zaključili koliko mora da bude x . Precizniji naziv za takav pristup bio bi numerička forenzika. Pošto je razmišljanje logičko i koristi opšte veze između klasa brojeva umesto da računa s konkretnim brojevima, rešenja teže da budu vrlo opšta, pa se mogu primeniti na čitave familije brojeva. Današnji računarski programi za tabelarne proračune predstavljaju digitalnu implementaciju algebre na isti način na koji je elektronski kalkulator digitalna implementacija aritmetike.

Tako su, zahvaljujući El Horezmijevim knjigama, persijski i arapski trgovci u IX veku imali pristup ne samo indoarapskoj aritmetici, već i mnogo snažnijoj metodi algebre koju su razvili njihovi

sunarodnici. U Bagdadu tog vremena se nije začela trgovinska revolucija, kao što će se to desiti četiri veka kasnije kada ti metodi stignu u Italiju, zato što trgovinski svet nije bio dovoljno razvijen da bi novi metodi imali dalekosežan uticaj.

Inovacije uobičajeno nastaju kao način da se poboljša efikasnost procesa koji već postoji. Međutim, vrlo često inovacije vode ka novim aktivnostima koje ranije nisu praktikovane, a koje često zamenjuju stare aktivnosti. U slučaju savremene aritmetike i algebre, taj drugi korak bio je iskoristiti te metode kako bi se međunarodna trgovina vodila *u povećanom obimu*. Italijanska poslovna udruženja iz XIII veka, u Toskani i Lombardiji, imala su zadatak da načine taj drugi korak.

Danas znamo da je Leonardov prikaz savremene aritmetike i algebre bio zamajac koji je pokrenuo razvoj savremenog trgovinskog sveta. To što su efikasni metodi za aritmetiku i algebru stavljeni u ruke svakome ko je bio raspoložen da potroši nekoliko nedelja kako bi ih savladao, otvorilo je vrata ambicioznim pojedincima da potraže svoju sreću kroz razmenu i trgovinu. Bila je to prva „računarska“ revolucija, kojoj nije nedostajalo ljudi tako željnih napretka; isto se to desilo osamdesetih godina XX veka, za vreme druge takve računarske revolucije, koja je započeta u kalifornijskoj Silicijumskoj dolini, kada je kupovina elektronskog uređaja za računanje nudila slično obećanje svetle budućnosti.

Međutim, u Leonardovo vreme nije postojala perspektiva iz koje se mogla videti ta ogromna trgovačka transformacija, a njegova uloga u njoj nije bila ni prepoznata ni shvaćena.

Pa ipak, mnoge prve knjige o računu sadržale su uvodnu napomenu da je izlaganje koje sledi bilo „na način Leonarda Pizanskog“. Postavlja se pitanje zašto?

U prvim knjigama o računu citat je zasigurno naveden zato što su Leonardova dela bila tako dobro poznata. Ali, kako je vreme prolazilo, ta napomena postala je tek nešto više od ritualnog dogovora koji je prepisivan iz jednog teksta u drugi, i vrlo je verovatno

da većina autora knjiga o računanju nije ni imala predstavu ko je bio taj misteriozni čovek, niti šta je on uradio. I kako su se decenije pretvorile u vekove, navika je postepeno zamrla – osim u Pačolijevom slučaju, koji je takvu napomenu stavio na početak svog teksta iz 1494. godine.

Pačolijeva knjiga je značajna zato što je obezbedila dokaz na osnovu koga će Leonardu jednog dana biti priznato da je bio glavna figura u iniciranju nastanka savremenog sveta. Pošto je Pačoli bio poznat i poštovan matematičar velikih sposobnosti, njegova podrška Leonardu skoro sigurno nije bilo ceremonijalna, već je imala težinu. Štaviše, njegova knjiga nije bila pisana rukom, već je bila štampana – što je značilo da je umnožena bez grešaka, da je bila mnogo šire rasprostranjena i da je duže potrajala.

Ironija je u tome da bi nastanak štampe zapečatio Leonardovu sudbinu i izbrisao ga iz istorije da ga Pačoli nije pomenuo u kratkom uvodnom pasusu svoje štampane knjige. Jer, ukoliko želimo da shvatimo zašto je Leonardovo ime uopšte nestalo, ne moramo ići dalje od 1450, od izuma štamparske mašine. Rukopisi o praktičnoj matematici bili su među prvim delima koja su štampana (svakako i zbog potrebe za praktičnom aritmetikom koju je stvorilo Leonardovo delo, kao što smo već videli). Ne iznenađuje onda da su štampari uložili veliki trud da pripreme dela koja su im bila najpre dostupna i najsavremenija, a među takvima su se nalazili mnogi kraći, pojednostavljeni rukopisi nastali na osnovu Leonardovih dela, od kojih je svaki sadržao najnovije cene i kurseve za razmenu valuta. Leonardovi značajno duži i četvrt veka stari originali već su skupljali prašinu u nekim arhivama. I tu bi možda i ostali neotkriveni, da Pačoli nije naveo Leonarda kao originalni izvor materijala za svoju štampanu knjigu – i time napravio referencu koja je čekala 300 godina, sve dok Kosali 1797. nije naleteo na nju.